

Vấn đề 2: Giới hạn của hàm số

Dạng 1: Tính giới hạn hàm số bằng định nghĩa và nguyên lý kẹp

Phương pháp: 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall (x_n), x_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L)$

$$2) \begin{cases} h(x) \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in D \\ \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 9); & 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 3x^4 + 1}{x + 2}; \\ 3) \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} (\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x); & 4) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 5x^3}}{x - 1} \right) \end{array}$$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

$$\begin{array}{ll} 1) \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}; & 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \sin^5 4x; \\ 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sin x + \cos x}{x} \right); & 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin x^2}{x^2} + \dots + \frac{\sin x^{100}}{x^{100}} \right) \end{array}$$

Dạng 2: Các dạng vô định

Bài toán 1: Tính $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ mà $f(a) = g(a) = 0$. (Dạng vô định $\frac{0}{0}$)

Phương pháp: Phân tích $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

Chú ý: 1) $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x = \alpha, x = \beta$ thì $f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$

2) Sơ đồ Horner

$$3) (\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2; (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$$

$$(\sqrt[3]{a} \pm b)(\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2); (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 3}; & 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 7x + 6}; & 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x + 5}{x^3 - x^2 - 6x + 6}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^6 - 5x^5 + x}{(1-x)^2}; & 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; & 6) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}; & 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + (n+1)}{(x-1)^2}; & 9) \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}; \\ 10) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + \sqrt{x} - 6}{x - 5\sqrt{x} + 6}; & 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x\sqrt{x} - 2x + 1}; & 12) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x\sqrt{a} - a\sqrt{x}} \end{array}$$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+2x-3}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}+x-4}{x^3-4x^2+3}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+5}}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x+\sqrt{3x^2-8}}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+5}-5}{4-x^2}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{2x^2-7}-2}{x^2-2x-8}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+(1-x)\sqrt{3x-2}}{x-2}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{2x+9}}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}-2}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-\sqrt{3x-2}}{x-1}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}+x^4-3x^3+x^2+3}{\sqrt{2x-2}}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+x^3-3x}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x-2}}{x-2}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5}-2}{x^2-5x+4}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x^3+10}+x-1}{x^2+3x+2}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2+4}+2x+2}{x^3+8}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-\sqrt[3]{2x^2-3}}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}+1}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{4x+4}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}-1}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+x^2+x+1}}{x+1}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1}+x^2-3x+1}{\sqrt[3]{x-2}+x^2-x+1}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{x+x^2-7x-10}}{x-8}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x+2}+x^2+2x}{\sqrt{x+2}+x^2-x-3}$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x^2}-\sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sin x}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2+2004)\sqrt[3]{1-2x}-2004}{x}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3\sqrt{4x^3-24}+\sqrt{x+2}-8\sqrt{2x-3}}{4-x^2}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1}+3\sqrt{x^2+x+1}-5\sqrt{2x^2-1}}{1-x}$

Bài toán 2: Tính $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ (Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$)

Phương pháp: Đặt x với số mũ cao nhất ở tử và mẫu ra làm thừa số chung.

- Chú ý:** 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x^n} = 0 (a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*)$; 2) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty$
 3) $x \rightarrow +\infty$ thì $x > 0$; $x \rightarrow -\infty$ thì $x < 0$; 4) $\sqrt{A^2} = |A|$

TÍNH CÁC GIỚI HẠN SAU

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + x - 1}{3x^7 + 2x^2 - 2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 3x^2 + 2}{3x - 2x^2 - 3x^4}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^5 - 3x^2 + 2}{3x - 2x^2 - 3x^4}$
 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 - 3x^2 + 2}{3x - 2x^2 - 3x^4}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1-2x)(3x-1)^2(2-3x)^3}{(1+2x)(2x-1)^2(2-5x)^3}$
 6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(1-x)(3x^2-1)(2-3x)^3}{x^3(2x-1)^2(2-5x)}$; 7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+3}}{\sqrt[3]{3x^3+x-1}}$; 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+x+3}}{\sqrt[3]{3x^3+x-1}}$
 9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2-x+1-x}}$; 10) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - \cos 2x}{3x + \sin 3x}$; 11) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + \sin \pi x}{\cos x^2 - 3x^2}$

Bài toán 3: Tính $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ mà $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ (Dạng vô định $\infty - \infty$)

Phương pháp: Chuyển về dạng $\frac{\infty}{\infty}$ hoặc $\frac{0}{0}$

Chú ý: $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$; $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$
 $(\sqrt[3]{a} \pm b)(\sqrt[3]{a^2} \mp b\sqrt[3]{a} + b^2)$; $(\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$. Tính các giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Bài 2: Tính các giới hạn sau:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$; 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \sqrt{x^2 - 2x + 4})$
 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}}{2x + 1 + \sqrt{2x^2 + 3}}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 + 5x})$
 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2\sqrt{4x^2 - 3x} + 3\sqrt[3]{x^3 - x} - 7\sqrt{x^2 + 3})$; 6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x + \sqrt[3]{3x^2 - x^3})$
 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$; 8) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \right)$

Bài 3: Tìm a, b sao cho $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x + 3} - ax - b) = 0$

Bài 4: Tính các giới hạn sau

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right]$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$
 3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1})$; 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2) \dots (x+a_n)} - x)$

Bài toán 4: Giới hạn các hàm lượng giác (dạng vô định)

Phương pháp: Sử dụng công thức $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$ và $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$

Bài 1: Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{2x}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \tan 2x}{x} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 3x}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \sin x}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Bài 2: Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 3x} \\ 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{3}{\sin 3x} \right) \frac{1}{x}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\tan^2 x} \\ 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}; & \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3} \end{aligned}$$

Bài 3: Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{\sin(x-1)}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2x}{\tan(x-1)}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \\ 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \tan x; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cos x}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x} \\ 7) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3 \tan x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}; & \quad 8) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}; & \quad 9) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^3 x} \end{aligned}$$

Bài 4: Tính các giới hạn sau

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\tan^2 x}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}}{x} \\ 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(a+x) \tan(a-x) - \tan^2 a}{x^2}; & \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2 \sin(a+x) + \sin a}{x^2} \end{aligned}$$

Bài 5: Tính các giới hạn sau

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}); \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x})$$

Dạng 3: Giới hạn một bên

Chú ý: 1) $x \rightarrow a^+ \Rightarrow x > a$; $x \rightarrow a^- \Rightarrow x < a$

$$2) A = \begin{cases} \sqrt{A^2}, A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2}, A < 0 \end{cases}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \end{cases}$$

Bài 1: Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{lll}
 1) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2(4-x)}}{x^2-4}; & 2) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{3-x}; & 3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{(16-x^2)(-x^2+5x-4)}}{x^2-x-8} \\
 4) \lim_{x \rightarrow 1^-} x \frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}+1-x}; & 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2+x-22}{3-x}; & 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|2-\sqrt{5-x}|}{(x-1)^2}
 \end{array}$$

Bài 2: Tính giới hạn trái, phải, giới hạn (nếu có) của các hàm $f(x)$ khi x dần ra x_0

$$\begin{array}{ll}
 1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}, & x > 1 \\ \frac{x}{2}, & x \leq 1 \end{cases}, x_0 = 1; & 2) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}, & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0 \\
 3) f(x) = \frac{2}{\sqrt{4x^2+x^3}}, x_0 = 0; & 4) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-3x+2}}{x^2-5x+4}, x_0 = 1
 \end{array}$$

Bài 3: Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}, & x > 1 \\ mx+2, & x \leq 1 \end{cases}$. Tìm m để hàm $f(x)$ có giới hạn khi x dần ra 1

Bài 4: Cho hàm $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+9}-\sqrt{x^2+4}-1}{x}, & x < 0 \\ m + \frac{x^2-3x+1}{x+2}, & x \geq 0 \end{cases}$. Tìm m để hàm $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 0$

Bài 5: Cho $f(x) = \frac{ax+1}{x^2-3x+2} + \frac{b}{x^2-4}$. Tìm a, b để $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

Vấn đề 3: Hàm số liên tục

Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Bài toán 1: Xét tính liên tục của hàm $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x \neq x_0 \\ a, x = x_0 \end{cases}$ tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp: 1) Tìm tập xác định
2) Tính $f(x_0)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3) So sánh và kết luận

Bài 1: Xét tính liên tục tại x_0 của hàm f biết:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}, x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, x = 1 \end{cases}, x_0 = 1; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x}, x \neq 2 \\ 1, x = 2 \end{cases}, x_0 = 2$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x - 1}, x \neq 1 \\ \pi, x = 1 \end{cases}, x_0 = 1; \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}, x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

Bài 2: Tìm a để các hàm số sau liên tục tại x_0

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x^2 - 1}{x}, x \neq 0 \\ 2a - 1, x = 0 \end{cases}, x_0 = 0; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}, x \neq 0 \\ 2x - 1, x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{2x^2 + 9} + 2x - 9}{2x - 6}, x \neq 3 \\ 2a + 1, x = 3 \end{cases}, x_0 = 3; \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1}, x \neq 1 \\ 3x + a, x = 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

Bài 3: Tìm a, b để hàm $f(x) = \begin{cases} a, x = 0 \\ \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}, x^2 - 3x \neq 0 \\ b, x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$ và $x = 3$

Bài toán 2: Xét tính liên tục của hàm $f(x) = \begin{cases} f_1(x), x > x_0 \\ f_2(x), x \leq x_0 \end{cases}$ tại điểm $x = x_0$.

Phương pháp: 1) Tìm tập xác định
2) Tính $f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
3) So sánh và kết luận

Bài 1: Xét tính liên tục tại x_0 của hàm f biết:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, x > 3 \\ 2x, x \leq 3 \end{cases}, x_0 = 3; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + x - 2} - \frac{1}{x^3 - 1}, x > 1 \\ 2x - 1, x \leq 1 \end{cases}, x_0 = 1$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x-1|}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}, x_0 = 1; \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 4}{x-4}, & x > 4 \\ 3, & x = 4 \\ \frac{2x-3}{x-1}, & x < 4 \end{cases}, x_0 = 4$$

Bài 2: Tìm giá trị của tham số để hàm sau liên tục tại x_0

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{x}, & x < 0 \\ 2a + \frac{4-x}{x+2}, & x > 0 \end{cases}, x_0 = 0;$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{\cos 4x}}{x \sin 2x}, & x < 0 \\ \frac{x+a}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \leq 3 \\ ax = b, & 3 < x < 5, x_0 = 4 \text{ và } x_0 = 5 \\ \frac{7x}{5}, & x > 5 \end{cases}$$

Dạng 2: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng

- Phương pháp: 1) Tìm tập xác định
 2) Xét tính liên tục trên những khoảng đơn
 3) Xét tính liên tục tại biên
 4) Kết luận

Bài 1: Xét tính liên tục của các hàm sau

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 6x^2 + x + 3}{x+3}, & x \neq -3; \\ 15, & x = -3 \end{cases}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \left| \frac{\sin x}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}; \quad 4) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bài 2: Tìm giá trị tham số để hàm f liên tục trên D

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2}, & x > 2 \\ ax + \frac{1}{3}, & x \leq 2 \end{cases}, D = \mathbb{R}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2ax + \frac{b}{x}, & x > 1 \\ x^3 + x + 1, & x = 1 \\ a \frac{2-3x}{x-2} - bx, & x < 1 \end{cases}, D = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt[3]{3x+5}}{x-1}, & x \neq 1 \\ ax + 3, & x = 1 \end{cases}, D = [-3; +\infty); \quad 4) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}, & x \neq \frac{\pi}{3} \\ \tan \frac{\pi}{6} + a, & x = \frac{\pi}{3} \end{cases}, D = \mathbb{R}$$

Dạng 3: Chứng minh phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm

- Phương pháp:* 1) Tìm hai số a, b sao cho $f(a)f(b) < 0$
 2) Chứng minh f liên tục trên $[a; b]$
 3) Kết luận: $f(x) = 0$ có nghiệm trong khoảng $(a; b)$

Bài 1: Chứng minh rằng

- 1) $x^5 + 7x^4 - 3x^2 + x + 2 = 0$ có nghiệm
- 2) $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt trong $(-2; 2)$
- 3) $x^3 - 3x + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt
- 4) $x^5 - 10x^3 + 100 = 0$ có 5 nghiệm phân biệt

Bài 2: Chứng minh các phương trình sau có nghiệm với mọi m

- 1) $\sin x + m \sin 2x = 0$;
- 2) $x^4 + mx^2 - 2mx - 2 = 0$;
- 3) $(m^2 + m + 1)x^8 + 2x - 2 = 0$
- 3) $p(x-a)(x-c) + q(x-b)(x-d) = 0$ với $a \leq b \leq c \leq d$; $p, q \in \mathbb{R}$

Bài 3: Cho hàm f liên tục trên $[a; b]$ và có miền giá trị cũng là $[a; b]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = x$ có nghiệm trên $(a; b)$.

Bài 4: Cho hàm f liên tục trên $[a; b]$ và α, β là hai số dương bất kỳ. Chứng minh rằng phương trình

$$f(x) = \frac{\alpha f(\alpha) + \beta f(\beta)}{\alpha + \beta}$$

có nghiệm trong $[a; b]$

Bài 5: Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $f(x + \frac{1}{2})$ đều liên tục trên $[0; 1]$ và $f(0) = f(1)$. Chứng minh rằng

phương trình $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ có nghiệm trong $\left[0; \frac{1}{2}\right]$